ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGUYỄN VĂN CƯỜNG

VỀ TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA MỘT SỐ LỚP HỆ NƠ RON THẦN KINH PHÂN THỨ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 04/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGUYỄN VĂN CƯỜNG

VỀ TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA MỘT SỐ LỚP HỆ NƠ RON THẦN KINH PHÂN THỨ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. MAI VIẾT THUẬN

Thái Nguyên, 4/2018

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Trong những năm gần đây, giải tích phân thứ và hệ phương trình vi phân phân thứ đã nhận được nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà khoa học do những ứng dụng của chúng trên nhiều lĩnh vực của khoa học kỹ thuật [5, 6, 7]. Có nhiều loại đạo hàm phân thứ khác nhau tùy thuộc vào cách người ta tổng quát đạo hàm $\frac{d^n}{dx^n}$ cho trường hợp n không nguyên. Tuy nhiên, hai khái niệm được dùng phổ biến hơn cả là đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville và đạo hàm phân thứ Caputo. Đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville được phát triển bởi Abel, Riemann và Liouville trong nửa đầu thế kỉ 19. Xét theo tiến trình lịch sử, đây là khái niệm đạo hàm phân thứ đầu tiên được xây dựng. Tuy nhiên, khi áp dụng khái niệm này để mô tả các hiện tượng thực tế thì gặp hạn chế do điều kiện ban đầu trong các bài toán giá trị đầu không có nhiều ý nghĩa vật lý. Đạo hàm phân thứ Caputo được Caputo xây dựng năm 1969. So với đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville, đạo hàm Caputo dễ áp dụng cho các bài toán thực tế hơn vì điều kiện ban đầu của các mô hình sử dụng đạo hàm Caputo có ý nghĩa vật lý. Những năm gần đây, hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước với nhiều bài toán khác nhau như nghiên cứu tính ổn định theo nghĩa Lyapunov của hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo [8], nghiên cứu tính ổn định hữu hạn của hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo [9].

Những năm gần đây, hệ phương trình nơ ron thần kinh phân thứ nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học. Có rất nhiều công trình được công bố trên các tạp chí quốc tế uy tín về bài toán ổn định theo nghĩa Lyapunov, ổn định hữu hạn thời gian (xem [10] và các tài liệu tham khảo trong đó). Vì vậy, có thể nói việc nghiên cứu tính ổn định và ổn định hóa theo nghĩa Lyapunov của một số lớp hệ nơ ron thần kinh là bài toán quan trọng và có ý nghĩa khoa học. Luận văn tập trung nghiên cứu tính ổn định, tính ổn định hóa theo nghĩa Lyapunov của một số lớp hệ nơ ron thần kinh phân thứ. Luận văn gồm có 3 chương gồm những nội dung chính sau:

Trong chương 1, chúng tôi trình bày một số khái niệm về giải tích phân thứ như tích phân và đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville, tích phân và đạo hàm phân thứ Caputo. Sau đó, chúng tôi trình bày một số định lí tồn tại và duy nhất nghiệm. Chúng tôi cũng trình bày một số bổ đề bổ trợ được dùng để chứng minh một số kết quả trong Chương 3 của luận văn. Ngoài ra, chúng tôi cũng trình bày một số tiêu chuẩn cho tính ổn định Mittag–Leffer của lớp hệ tuyến tính phân thứ và lớp hệ có nhiễu phi tuyến phân thứ. Nội dung chính của chương này được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [3, 4, 6, 7].

Trong chương 2 của luận văn, chúng tôi trình bày một số tiêu chuẩn cho tính ổn định và ổn định hóa cho lớp hệ nơ ron thần kinh phân thứ. Nội dung chính của chương này được tham khảo chủ yếu từ tài liệu [11].

Trong chương 3 của luận văn, chúng tôi nghiên cứu tính ổn định và ổn định hóa cho lớp hệ nơ ron thần kinh không chắc chắn phân thứ. Đây chính là nội dung nghiên mới cứu của luận văn.

Danh mục ký hiệu

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$	tập các số thực, số thực không âm tương ứng
$\mathbb{R}^n$	không gian vec tơ thực Euclide n chiều
$A^\top$	ma trận chuyển vị của ma trận A
I	ma trận đơn vị
$\lambda(A)$	tập hợp tất cả giá trị riêng của ma trận A
$\lambda_{\max}(A)$	$= \max\{Re\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$
$\lambda_{\min}(A)$	$= \min\{Re\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$
$\\|A\\|$	chuẩn phổ của ma trận $A, \\|A\\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}$
$A \geq 0$	ma trận A nửa xác định dương, tức là $\langle Ax, x\rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
$A \geq B$	nghĩa là $A - B \geq 0$
$A > 0$	ma trận A xác định dương, tức là $\langle Ax, x\rangle > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$
$LMIs$	bất đẳng thức ma trận tuyến tính (Linear matrix inequalities)
$\\|x\\|$	chuẩn Euclide của véc tơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^{n\times r}$	không gian các ma trận thực cỡ $(n \times r)$
$C([a, b], \mathbb{R}^n)$	không gian các hàm liên tục trên$[a, b]$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$
$AC^m[a, b]$	không gian các hàm liên tục tuyệt đối cấp m trên$[a, b]$
${}_{t_0}I_t^\alpha$	toán tử tích phân phân thứ Riemann - Liouville cấp α
${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha$	toán tử đạo hàm phân thứ Riemann - Liouville cấp α
${}_{t_0}^{C}D_t^\alpha$	toán tử đạo hàm phân thứ Caputo cấp α
$\Gamma(x)$	hàm Gamma
$E_{\alpha,\beta}$	hàm Mittag-Leffler hai tham số
$\lceil\alpha\rceil$	số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng α

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả về tính ổn định và ổn định hóa của các hệ phương trình vi phân thường và hệ phương trình vi phân có trễ. Chúng tôi cũng trình bày một số kết quả bổ trợ sẽ được sử dụng trong chứng minh các kết quả chính của luận văn cho các chương sau. Kiến thức sử dụng ở chương này được tham khảo ở [3, 4, 6, 7].

1.1. Giải tích phân thứ

1.1.1. Tích phân phân thứ

Trong mục này, chúng tôi trình bày sơ lược về khái niệm tích phân phân thứ. Khái niệm tích phân phân thứ là một mở rộng tự nhiên của khái niệm tích phân lặp thông thường.

Định nghĩa 1.1. ([7]) *Cho $\alpha > 0$ và $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tích phân phân thứ Riemann-Liouville cấp α của hàm $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi*

$$_{t_0}I_t^{\alpha} x(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds, \quad t \in (a, b],$$

trong đó $\Gamma(.)$ là hàm Gamma xác định bởi $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt, \alpha > 0.$

Trong Định nghĩa 1.1 khi $\alpha = 0$, chúng ta quy ước $_{t_0}I_t^{\alpha} := I$ với I là toán tử đồng nhất. Sự tồn tại của tích phân phân thứ Riemann–Liouville cấp α với $0 < \alpha < 1$ được cho bởi định lí sau

Định lí 1.1. ([3]) *Giả sử $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích trên $[a, b]$. Khi* *đó, tích phân* ${}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t)$ *tồn tại với hầu hết* $t \in [a, b]$. *Hơn nữa,* ${}_{t_0}I_t^{\alpha}x$ *cũng là một hàm khả tích.*

Ví dụ sau đây cho ta tích phân phân thứ của một số hàm cơ bản.

Ví dụ 1.1. ([3])

(i) Cho $x(t) = (t-a)^{\beta}$, ở đây $\beta > -1$ và $t > a$. Với bất kì $\alpha > 0$, chúng ta có

$$
{}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}, \quad t > a.
$$

(ii) Cho $x(t) = e^{\lambda t}, \lambda > 0$. Với bất kì $\alpha > 0$, chúng ta có

$$
{}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t) = \lambda^{-\alpha}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+j+1)}, \quad t > 0.
$$

1.1.2. Đạo hàm phân thứ

Mục này trình bày một cách ngắn gọn về đạo hàm Riemann–Liouville và đạo hàm Caputo. Đây là hai loại đạo hàm được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực.

Định nghĩa 1.2. ([6]) *Cho trước một số thực dương* α *và một khoảng* $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp* α *của hàm* $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *được cho bởi*

$$
{}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t) := \frac{d^n}{dt^n}\left[{}_{t_0}I_t^{n-\alpha}x(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}x(s)ds,
$$

trong đó $n := \lceil \alpha \rceil$ *là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng* α *và* $\frac{d^n}{dt^n}$ *là đạo hàm thông thường cấp* n.

Ví dụ 1.2. Cho hàm bước đơn vị (unit-step function)

$$
f(t) = \begin{cases} 1, \text{nếu} \quad t \geq 0 \\ 0, \text{nếu} \quad t < 0. \end{cases}
$$

Bằng cách sử dụng Định nghĩa 1.2, ta tính đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp α của hàm $f(t)$ là

$$
{}_{0}^{RL}D_t^{\alpha}f(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.
$$

Trước khi trình bày điều kiện cho sự tồn tại của đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville, chúng tôi nhắc lại một số kết quả sau.

Cho $[a, b]$ là một khoảng hữu hạn trong $\mathbb{R}$. $AC[a, b]$ là không gian các hàm tuyệt đối liên tục trên $[a, b]$. Kolmogorov và Fomin đã chỉ ra mối liên hệ giữa các hàm tuyệt đối liên tục và các hàm khả tích Lebesgue như sau:

$$f(t) \in AC[a, b] \Leftrightarrow f(t) = c + \int_a^t \varphi(s)ds \quad (\varphi(s) \in L(a, b)),$$

do đó một hàm tuyệt đối liên tục $f(t)$ có đạo hàm $f'(t) = \varphi(t)$ hầu khắp nơi trên $[a, b]$.

Với $n \in \mathbb{N}$, ta định nghĩa lớp hàm $AC^n[a, b]$ như sau:

$$AC^n[a, b] = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, (D^{n-1}f)(t) \in AC[a, b] \quad \left(D = \frac{d}{dt}\right)\}.$$

Mệnh đề sau đây cho ta một số đặc tính của lớp hàm $AC^n[a, b]$.

Mệnh đề 1.1. ([7]) *Không gian $AC^n[a, b]$ chứa tất cả các hàm $f(t)$ có dạng như sau:*

$$f(t) = {}_{t_0}I_t^\alpha \varphi(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k(t - t_0)^k,$$

trong đó $\varphi(t) \in L(a, b), c_k(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$ là các hằng số tùy ý và

$${}_{t_0}I_t^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t - s)^{n-1}\varphi(s)ds.$$

Ngoài ra, từ các điều kiện trên ta có

$$\varphi(s) = f^{(n)}(s), \quad c_k = \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(k = 0, 1, \ldots, n - 1).$$

Định lí sau cho ta một tiêu chuẩn cho sự tồn tại của đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville.

Định lí 1.2. ([7]) *Cho $\alpha \geq 0, n = [\alpha] + 1$. Nếu $f(t) \in AC^n[a, b]$, khi đó đạo hàm phân thứ ${}^{RL}_{t_0}D_t^\alpha f(t)$ tồn tại hầu khắp nơi trên $[a, b]$ và có thể được biểu diễn dưới dạng sau*

$${}^{RL}_{t_0}D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{\Gamma(1 + k - \alpha)}(t - t_0)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(s)ds}{(t - s)^{\alpha-n+1}}.$$

Kết quả sau đây được suy ra trực tiếp từ Định lí 1.2

Hệ quả 1.1. ([7]) *Nếu* $0 < \alpha < 1$ *và* $f(t) \in AC[a,b]$ *thì*

$$ {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(t_0)}{(t-t_0)^{\alpha}} + \int_{t_0}^{t} \frac{f'(s)ds}{(t-s)^{\alpha}} \right]. $$

Mệnh đề sau khẳng định toán tử đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville là một toán tử tuyến tính.

Mệnh đề 1.2. ([6]) *Cho trước một số thực dương* α*. Khi đó đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp* α *là một toán tử tuyến tính, tức là*

$$ {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} \left[\lambda f(t) + \mu g(t)\right] = \lambda\, {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} f(t) + \mu\, {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} g(t) $$

trong đó $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, f(t), g(t) \in AC^n[a,b]$.

Chứng minh. Ta có

$$ \begin{aligned} & {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} \left[\lambda f(t) + \mu g(t)\right] \\ & = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} \left[\lambda f(s) + \mu g(s)\right] ds \\ & = \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds + \frac{\mu}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} g(s) ds \\ & = \lambda\, {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} f(t) + \mu\, {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} g(t). \end{aligned} $$

□

Định nghĩa 1.3. ([6]) *Cho trước một số thực dương* α *và một khoảng* $[a,b] \subset \mathbb{R}$*. Đạo hàm phân thứ Caputo cấp* α *của hàm* $x : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *được cho bởi*

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) := {}_{t_0}I_t^{n-\alpha} D^n x(t), $$

trong đó $n := \lceil \alpha \rceil$ *là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng* α *và* $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ *là đạo hàm thông thường cấp* n*.*

Đối với một hàm véc tơ $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_d(t))^T$ đạo hàm phân thứ Caputo của $x(t)$ được định nghĩa theo từng thành phần như sau:

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) := \left({}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x_1(t), {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x_2(t), \ldots, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x_d(t) \right)^T. $$

Định lí sau cho ta một điều kiện đủ cho sự tồn tại đào hàm Caputo phân thứ cấp α.